Statistische Physik - Aufgabenblatt 2

Wintersemester 2006/2009, Dozent: Dr. Wolfram Liebermeister, Übungen: Kajetan Bentele
`www.molgen.mpg.de/~ag_klipp/vorlesung_statistische_physik_2008/`

Aufgabe 1

Eine verdünnte Lösung von Makromolekülen der Temperatur T wird in eine Ultrazentrifuge gebracht, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht.

(a) Wie ändert sich die Dichte $\rho(r)$ mit dem Abstand zur Drehachse?

(b) Zeige, wie sich das Molgewicht μ der Moleküle aus dem Quotienten $\rho(r_1)/\rho(r_2)$ ermitteln lässt, der durch optische Methoden messbar ist.

Hinweis: Bestimme die effektive potentielle Energie für einzelne Teilchen und verwende die Boltzmannverteilung.

Aufgabe 2

Ein rechtwinkliger Kasten mit vier Wänden und einem Boden (aber ohne Deckel) wird betrachtet. Die Gesamtfläche der Wände und des Bodens, A, sei vorgegeben. Gib die Abmessungen des Kastens an, für die sein Volumen maximal wird.

Aufgabe 3

Betrachte Bilder der Größe 1024 Pixel $\times$ 1024 Pixel, in denen jeder Pixel entweder schwarz oder weiß sein kann. Berechne die Shannon-Entropie (gemessen in bit) $H = \log_2 W$ für die Menge aller solcher Bilder (W bezeichnet die Anzahl der möglichen Bilder). Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Shannon-Entropie und der Boltzmann-Entropie? Betrachte die Untermenge aller Bilder, die horizontale und vertikale Spiegelsymmetrie aufweisen und berechne ihre Shannon-Entropie.

Aufgabe 4

Betrachte eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Dichte $p(x)$. Die differentielle Shannon-Entropie ist definiert als $S[p(\cdot)] = -\int p(x) \log_2 p(x)\, \mathrm{d}x$. Der Mittelwert einer kontinuierlichen Verteilung ist definiert als $\bar{x} = \int p(x)\, x\, \mathrm{d}x$. Für welche Form der Verteilung wird die differentielle Shannon-Entropie maximal? Betrachte die folgenden drei Fälle:

(a) Verteilungen mit Werten $x \in [0, 1]$.

(b) Verteilungen mit Werten $x \in \mathbb{R}_+$ und vorgegebenem Mittelwert (z.B. $\bar{x} = 1$).

(c) Verteilungen mit Werten $x \in \mathbb{R}$, vorgegebenem Mittelwert $\bar{x} = 0$ und vorgegebener Varianz (z.B. $\mathrm{var}(x) = 1$).

Hinweise: (i) Beachte, dass Wahrschinelichkeitsverteilungen normiert sein müssen. (ii) Verwende die folgende notwendige Maximalitätsbedingung: ist ein Funktional $F[p(\cdot)] = \int f(p(x))\mathrm{d}x$ maximal bzgl. der Funktion $p(x)$, so verschwinden alle ersten Variationen, d.h. für jede beliebige Testfunktion $u(x)$ muss gelten:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int f(p(x) + \alpha u(x))\mathrm{d}x|_{\alpha=0}.$$