Statistische Physik - Aufgabenblatt 3

Wintersemester 2006/2009, Dozent: Dr. Wolfram Liebermeister, Übungen: Kajetan Bentele
www.molgen.mpg.de/∼ag_klipp/vorlesung_statistische_physik_2008/

Aufgabe 1

(a) Leite die erzeugende Funktion $G(s) = \sum_n s^n P(n)$ der Binomialverteilung $P(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ (mit $p+q = 1$) her und berechne mit ihrer Hilfe Mittelwert und Varianz der Binomialverteilung. Hinweis: $G(s) = (sp + q)^N$.

(b) Leite die erzeugende Funktion $G(s) = \sum_n s^n P(n)$ der Poissonverteilung $P(n) = \lambda^n/n!\,\mathrm{e}^{-\lambda}$ her und berechne mit ihrer Hilfe Mittelwert und Varianz der Poissonverteilung. Hinweis: $G(s) = \mathrm{e}^{(s-1)\,\lambda}$.

Aufgabe 2

Leite für die erzeugende Funktion des Geburts-Todesprozesse (mit Geburtsrate k und Todesrate d) die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (s-1)(k\,s-d)\frac{\partial G}{\partial s}$$

für die erzeugende Funktion $G(s,t)$ her und zeige, dass

$$G(s,t) = \{\frac{(d\mathrm{e}^{(k-d)\,t} - d) - s(d\mathrm{e}^{(k-d)\,t} - k)}{(k\mathrm{e}^{(k-d)\,t} - d) - s(k\mathrm{e}^{(k-d)\,t} - k)}\}^{n_0}$$

diese Differentialgleichung sowie die Anfangsbedingung $P(n,0) = \delta_{n,n_0}$ erfüllt. Leite mittels $G(s,t)$ Mittelwert und Varianz für den Geburts-Todesprozess her (Lösungen siehe Skript).

Aufgabe 3

Betrachte die kontinuierliche Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c$$

und zeige, dass sie durch eine Gaußfunktion mit linear ansteigender Varianz oder durch Kosinusfunktion mit abklingender Amplitude gelöst wird.