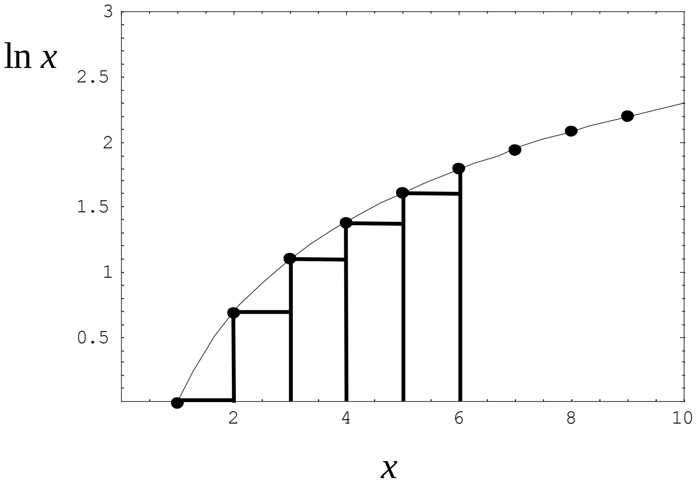
2. Stirling'sche Formel

Benannt nach James Stirling (1692-1770).

In der Binomialverteilung und bei vielen anderen Problemen der statistischen Physik spielen die Fakultäten $n!$ eine große Rolle. Die Berechnung ist sehr mühsam für $n >> 1$ oder sogar unmöglich (z.B. $n = 10^{23}$). Es ist wünschenswert, einen geeigneten Näherungsausdruck zu haben.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n = e^{ln 1} e^{ln 2} e^{ln 3} \ldots e^{ln(n-1)} e^{ln\, n} = \sum_{x=1}^{n} ln\, x \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln n! = \sum_{x=1}^{n} ln\, x$$



$$\sum_{x=1}^{n} ln\, x = \sum \text{ der Flächen der einzelnen Säulen } \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ln\, x(\Delta x);\ \Delta x = 1$$

dies wird approximiert durch das Integral

$$\sum_{x=1}^{n} ln\, x \Delta x \cong \int_1^n (ln\, x) dx = (x\, ln\, x - x)\Big|_1^n = n\, ln\, n - n - \underbrace{1 \times ln\, 1}_{=0} + \underbrace{1}_{\substack{wird \\ vernachlässigt}} \cong n \ln n - n$$

$$\ln n! \cong n \ln n - n \qquad (*)$$

damit $n! \cong e^{(n\, ln\, n - n)} = e^{n\, ln\, n} e^{-n} = \left(e^{ln\, n}\right)^n e^{-n} = n^n e^{-n}$ dh. $n! \cong \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Eine genauere Abschätzung ist $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Diese konvergiert gegen $n!$, d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \right] = 1$

In vielen fällen (s. Entropie) will man nur $\ln(n!)$ approximieren. Für diesen Zweck bzw. für sehr große n ist die Formel $(*)$ bereits hinreichend gut, wie man aus nachfolgender Überlegung erkennt. Wir betrachten

$$ln(n!) \cong ln\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right] = ln\left(n^n\right) - ln\left(e^n\right) + ln\sqrt{2\pi n} = n\ln n - n\underbrace{\ln e}_{=1} + ln\sqrt{2\pi n}$$

$$ln(n!) \cong n\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\ln n$$

z. B. $n = 6\cdot 10^{23} \Rightarrow ln\, n \cong 55$ d.h. $\ln(n!) \cong 6\cdot 10^{23}\cdot 55 - 6\cdot 10^{23} \underbrace{+0{,}91 + 27{,}5}_{vernachlässigbar} \cong 3{,}24\cdot 10^{25}$

Die Stirling'sche Formel stimmt schon für relativ kleine n erstaunlich gut mit dem exakten Ergebnis überein.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320
$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$	0,922	1,92	5,84	23,5	118,0	710,1	4981	39906
Fehler (%)	7,8	4,0	2,7	2,1	1,7	1,4	1,2	1,0

Eine noch genauere Abschätzung wäre: $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{1}{12\cdot n} + \cdots\right]$

Auch hier wird deutlich, daß für $n=8$ der Fehler ca. 1 % beträgt.