3. Poisson-Verteilung

Die Binomialverteilung spielt in der statistischen Physik eine zentrale Rolle. Einige andere Verteilungen ergeben sich als Grenzfälle.

Wir beziehen uns auf das am Ende von Kap. 1 diskutierte Beispiel: Verteilung von n Teilchen in zwei Volumina V_1 und V_2

$$P(n_1)=\binom{n}{n_1}p^{n_1}\, q^{n-n_1} \quad , \quad \text{mit} \quad p=\frac{V_1}{V} \quad , \quad q=\frac{V_2}{V} \quad \text{und} \quad V=V_1+V_2 \Rightarrow \quad p+q=1$$

Wir hatten abgeleitet für die Binomialverteilung: $\bar{n}_1 = n\cdot p \quad , \quad \bar{n}_2 = nq = (1-p)n$

demzufolge: $p=\frac{\bar{n}_1}{n}$; $q=1-p=1-\frac{\bar{n}_1}{n}$

$$P(n_1)=\binom{n}{n_1}\left(\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n_1}\left(1-\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n-n_1} \quad \text{mit} \quad \bar{n}_1 = n\cdot\frac{V_1}{V}=n\left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)$$

Wir betrachten bei festgehaltenem V_1 eine Vergrößerung von V_2 (damit des Gesamtvolumens V) bei gleichzeitiger Vergrößerung von n, auf solche Weise, daß $\bar{n}_1 = \text{konst}$ bleibt. (Würden wir nur das Volumen vergrößern, würde $\bar{n}_1$ sinken, wie man aus der letzten Formel sieht.)

Was passiert im Grenzfall: $V_1 = konst < \infty$, $V_2 \to \infty$, $n \to \infty$ und $\bar{n}_1 = n\left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right) = konst$?

$$P(n_1)=\frac{\{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-n_1)\}\{(n-n_1+1)\cdots(n-1)n\}}{\underbrace{[1\cdot 2\cdot 3\cdots(n_1-1)n_1]}_{n_1!}\underbrace{[1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-n_1-1)(n-n_1)]}_{(n-n_1)!}}\left(\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n_1}\left(1-\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n-n_1}$$

$$P(n_1)=\frac{\overbrace{(n-n_1+1)(n-n_1+2)\cdots(n-1)n}^{n_1\ Faktoren}}{n_1!}\left(\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n_1}\left(1-\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{-n_1}\left(1-\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n}$$

Der Faktor $\left(1-\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{-n_1} \to 1$ für $n \to \infty$, $\bar{n}_1 = konst.$ und jeden endlichen Wert von n_1:

$$P(n_1) \cong \frac{\overbrace{(n-n_1+1)(n-n_1+2)\cdots(n-1)n}^{n_1\ Faktoren}}{n_1!}\left(\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n_1}\left(1-\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n}$$ eine einfache Umformung ergibt:

$$P(n_1) \cong \left[\underbrace{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{(n_1-1)}{n}\right)}_{\to 1}\right]\frac{(\bar{n}_1)^{n_1}}{n_1!}\left(1-\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n}$$

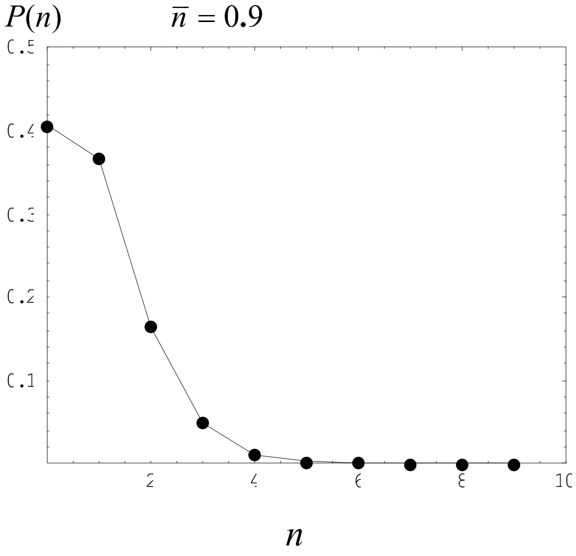
$$P(n_1) \cong \frac{(\bar{n}_1)^{n_1}}{n_1!}\left(1-\frac{\bar{n}_1}{n}\right)^{n}$$ Bekannterweise gilt: $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\Big|_{n\to\infty} = e^{-x}$ damit:

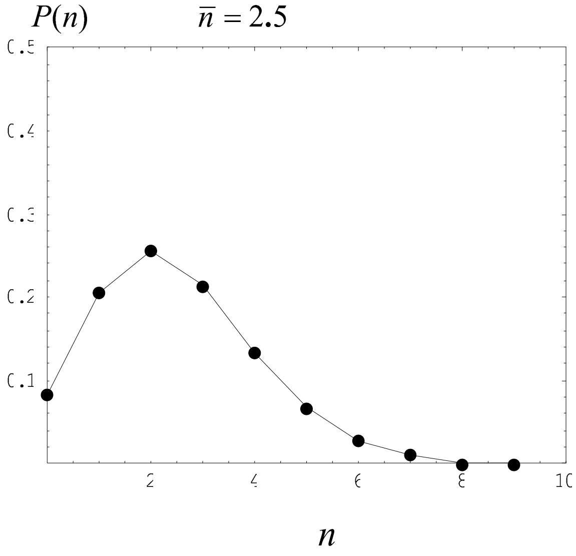
$$P(n_1) \cong \frac{(\bar{n}_1)^{n_1}}{n_1!}e^{-\bar{n}_1}$$

Da diese Verteilung der oben beschriebene Grenzfall der Binomialverteilung ist, hat sie auch den selben Mittelwert, nämlich $\bar{n}_1$. Dieser Grenzfall definiert die **Poisson-Verteilung:**

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^{n}}{n!}e^{-\bar{n}}$$

Der Mittelwert der Verteilung $\bar{n}$ ist ein positiver reeller Parameter (wird meistens mit λ bezeichnet).





Mittelwerte und Schwankungsquadrate für Poisson-Verteilung:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\overline{n}^n}{n!} e^{-\overline{n}} = e^{-\overline{n}} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\overline{n}^n}{n!}$$

$$= e^{-\overline{n}} \left(\overline{n} \frac{\partial}{\partial \overline{n}} \right) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{n}^n}{n!}}_{e^{\overline{n}}} = e^{-\overline{n}} \left(\overline{n} \frac{\partial}{\partial \overline{n}} \right) e^{\overline{n}} = e^{-\overline{n}}\, \overline{n}\, e^{\overline{n}} = \overline{n}$$ das ist natürlich das erwartete Ergebnis.

Zunächst die Berechnung von $\overline{n^2}$:

$$\overline{n^2} = \sum n^2 P(n) = \sum n^2 \frac{\overline{n}^n}{n!} e^{-\overline{n}}$$

$$= e^{-\overline{n}} \left(\overline{n} \frac{\partial}{\partial \overline{n}} \right) \left(\overline{n} \frac{\partial}{\partial \overline{n}} \right) \sum \frac{\overline{n}^n}{n!}$$

$$= e^{-\overline{n}} \left(\overline{n} \frac{\partial}{\partial \overline{n}} \right) \left(\overline{n} \frac{\partial}{\partial \overline{n}} \right) e^{\overline{n}} = e^{-\overline{n}} \left(\overline{n} \frac{\partial}{\partial \overline{n}} \right) \overline{n} e^{\overline{n}}$$

$$= e^{-\overline{n}}\, \overline{n} \left(e^{\overline{n}} + \overline{n}\, e^{\overline{n}} \right) = \overline{n} + (\overline{n})^2$$

Mittlere quadratische Schwankung:

$$\sigma^2 = \overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - (\overline{n})^2 = \overline{n} + (\overline{n})^2 - (\overline{n})^2 = \overline{n} \qquad \sigma = \sqrt{\overline{n}}$$

Besonderheit der Poissonverteilung: "Mittlere quadratische Abweichung = Mittelwert"

Relative Standardabweichung:

$$\frac{\sigma}{\overline{n}} = \frac{\sqrt{\overline{n}}}{\overline{n}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{n}}}$$ ähnliches Ergebnis wie bei der Binomialverteilung

D.h. die Verteilung wird immer "schärfer" für größer werdende *n*!

4. Charakteristische Funktionen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Sei $P(n)$ die Verteilung für die diskrete Variable *n* mit $\sum_n P(n) = 1$. Die komplexwertige Funktion

$$C(\varphi) \equiv \overline{e^{i\varphi n}} = \sum_n P(n) e^{i\varphi n}$$

($\overline{e^{i\varphi n}}$ ist der Erwartungswert der Größe $e^{i\varphi n}$) nennt man die **charakteristische Funktion** der Verteilung $P(n)$.

Wir betrachten die **1. Ableitung**: $\frac{dC(\varphi)}{d\varphi} = \sum_n i\, n\, P(n) e^{i\varphi n}$

$$\left.\frac{dC(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = i \sum_n n\, P(n) = i\, \overline{n}$$

$$\overline{n} = \frac{1}{i} \left.\frac{dC(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = -i \left.\frac{dC(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}$$

2. Ableitung

$$\frac{dC^2(\varphi)}{d\varphi^2} = \sum_n i^2 n^2 P(n) e^{i\varphi n} \quad , \qquad \left.\frac{dC^2(\varphi)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = -\sum_n n^2 P(n)$$

$$\overline{n^2} = -\left.\frac{dC^2(\varphi)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}$$

Allgemein gilt: $\left.\frac{dC^k(\varphi)}{d\varphi^k}\right|_{\varphi=0} = i^k \sum_n n^k P(n)$

$m_k = \sum_n n^k P(n) = \frac{1}{i^k} \left.\frac{dC^k(\varphi)}{d\varphi^k}\right|_{\varphi=0}$: *k*-tes Moment der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel Poissonverteilung: $P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, mit $\lambda = \overline{n}$

$$C(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{i\varphi n} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{i\varphi n}$$

$$C(\varphi) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\lambda e^{i\varphi}\right)^n = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i\varphi}} = e^{\lambda\left(e^{i\varphi}-1\right)}$$

$C(\varphi) = e^{\lambda\left(e^{i\varphi}-1\right)}$: charakteristische Funktion der Poissonverteilung

Probe: $\dfrac{dC(\varphi)}{d\varphi} = e^{\lambda\left(e^{i\varphi}-1\right)} i\lambda e^{i\varphi}$

$$\left.\frac{dC(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = i\lambda \quad , \qquad \lambda = \bar{n} = \left.\frac{dC(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}$$

Ähnlich können auch die höheren Momente berechnet werden.

Abschließende Bemerkungen:
Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt eine wohldefinierte charakteristische Funktion (c.F.) Umgekehrt kann man aus der c.F. die Verteilung eindeutig rekonstruieren, auch wenn die explizite Berechnung nicht immer einfach oder in einer geschlossenen Form möglich ist. Es sei bemerkt, daß die c.F. einer Verteilung (bis auf komplexe Konjugation) deren Fouriertransformierte ist.
Zwei nützliche Eigenschaften der charakteristische Funktion:

1. Nullpunktverschiebung und Multiplikation mit einer Konstanten:
Die Verteilung einer Zufallsvariablen n besitzt die c.F. $C(\varphi)$.
Dann besitzt die Verteilung von $n' = a\,n + b$ die c.F. $C'(\varphi) = e^{ib\varphi} C(a\varphi)$

2. Addition unabhängiger Zufallsvariablen:
n_1 und n_2 *unabhängige* Zufallsvariablen deren Verteilungen die c.F. $C_1(\varphi)$ und $C_2(\varphi)$ besitzen.
Dann besitzt die Verteilung der Variable $n' = n_1 + n_2$ die c.F. $C'(\varphi) = C_1(\varphi) \cdot C_2(\varphi)$
Die Kenntnis der c.F. erlaubt dann z.B. die Berechnung der Momente der Verteilung, ohne diese explizit kennen zu müssen.