12. Stochastische Beschreibung von Geburts- und Todesprozessen

Deterministisches Bild

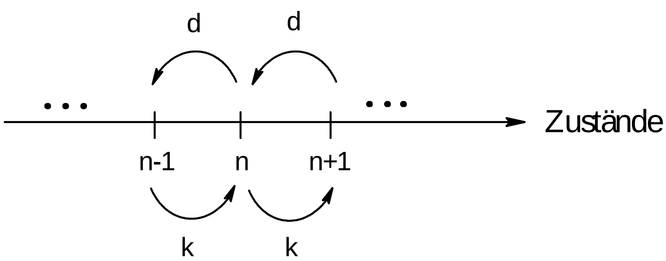
$\frac{dn}{dt} = k \cdot n - d \cdot n = (k - d)\, n$, mit n als kontinuierliche Variable

$n(t) = n_0\, e^{(k-d)t}$

$k > d$	$k < d$	$k = d$
exponent. Wachstum	Aussterben	Pop.-größe bleibt konstant

Bei einer stochastischen Beschreibung ergeben sich wichtige Modifikationen dieses Bildes.

n sei jetzt eine Zufallsvariable, die nur die diskreten Werte n=0, 1, 2,... annehmen kann.



$$\frac{dP(n,t)}{dt} = k(n-1)P(n-1,t) + d(n+1)P(n+1,t) - k \cdot n \cdot P(n,t) - d \cdot n\, P(n,t)$$

$$G(s,\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{dP(n,t)}{dt} = \underbrace{k \sum_{n=2}^{\infty} s^n (n-1)P(n-1,t)}_{\textit{kein Beitrag für } n \le 1} + d \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s^n (n+1)P(n+1,t) - \underbrace{(k+d)\sum_{n=1}^{\infty} s^n \cdot nP(n,t)}_{\textit{kein Beitrag für } n=0}$$

($n - 1 = 0$ für $n = 1$, $P(n-1) = 0$ für $n = 0$ usw.)

$$\frac{\partial G}{\partial t} = ks^2 \sum_{n=2}^{\infty} s^{n-2}(n-1)P(n-1,t) + d\sum_{n=0}^{\infty} s^n (n+1)P(n+1,t) - (k+d)s\sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \cdot n\,P(n,t)$$

Indexverschiebung:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = k \cdot s^2 \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \cdot n\,P(n,t) + d\sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \cdot nP(n,t) - (k+d)s\sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \cdot n\,P(n,t)$$

Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} n\,P(n,t) = \frac{\partial}{\partial s}\sum_{n=1}^{\infty} s^n P(n,t) = \frac{\partial G}{\partial s}$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = \left(ks^2 + d - (k+d)s\right)\frac{\partial G}{\partial s}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (s-1)(ks-d)\frac{\partial G}{\partial s}$$

für die Anfangsbedingung $P(n,0) = 1$ für $n = n_0$ und $P(n,0) = 0$ für $n \neq n_0$ lautet die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung:

$$G(s,t) = \left\{\frac{(de^{(k-d)t} - d) - s(de^{(k-d)t} - k)}{(ke^{(k-d)t} - d) - s(ke^{(k-d)t} - k)}\right\}^{n_0}$$

wie sich leicht durch Einsetzen bestätigen läßt (keine Herleitung der Lösung hier)

für $s = 1$ gilt wie gefordert: $G(s,t)\big|_{s=1} = \left\{\frac{-d+k}{-d+k}\right\} = 1$

Berechnung der 1. und 2. Ableitung liefert:

$\overline{n} = n_0\, e^{(k-d)t}$ wie in der deterministischen Theorie

$$\sigma^2 = n_0\left(\frac{k+d}{k-d}\right)e^{(k-d)t}\left(e^{(k-d)t}-1\right)$$

Ansteigen von σ^2 mit der Zeit: $\rightarrow$ Gefahr der "Fluktuationskatastrophe"
Entwicklung nach Potenzen von s liefert:

$P(0,t)$, $P(1,t)$ usw.

$$G(s,t) = G(0,t) + s\left.\frac{\partial G}{\partial s}\right|_{s=0} + \frac{s^2}{2}\left.\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\right|_{s=0} + \ldots = P(0,t) + sP(1,t) + s^2 P(2,t)$$

Also: $P(0,t) = G(0,t)$

$$P(0,t) = \left\{\frac{de^{(k-d)t} - d}{ke^{(k-d)t} - d}\right\}^{n_0}$$ ist endlich groß

$t \rightarrow \infty$:

$P(0,t) = \left(\frac{d}{k}\right)^{n_0}$ für $k > d$

$P(0,t) = 1$ für $k < d$

Für $k < d$ endet der Prozeß wie im deterministischen Bild stets mit dem Aussterben der Population.

Für $k > d$ gibt es einen großen Unterschied zur deterministischen Lösung: Diese wächst für $t \rightarrow \infty$ stets über alle Grenzen. Entsprechend der stochastischen Theorie besteht aber auch für $k > d$ eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Population ausstirbt.

z. B. $k = 10 \cdot d$:
bei $n_0 = 1$: $P(0) = 0.1$; $n_0 = 2$: $P(0) = 0{,}01$; usw.

(Bezug: Mutanten in Evolutionsmodellen)
Eine Auslöschung der Population wird vor allem dann zu beobachten sein, wenn n_0 klein ist.

Besonders interessant ist der Fall $k = d$:

$$P(0,t) = \left\{ \frac{de^{(k-d)t} - d}{ke^{(k-d)t} - d} \right\}^{n_0} = \left(1 - \frac{k-d}{k - de^{-(k-d)t}} \right)^{n_0}$$

$$\bar{n} = n_0 e^{(k-d)t} \;\; ; \;\; \bar{n} = n_0$$

$$\sigma^2 = n_0 \left(\frac{k+d}{k-d} \right) e^{(k-d)t} \left(e^{(k-d)t} - 1 \right)$$

bei $P(0,t)$ und σ^2 treten im Grenzfall $k = d$ Singularitäten auf ($\bar{n} = n_0$ bleibt konstant).

Wir setzen $k - d = \delta$ und erhalten:

$$\sigma^2 = n_0 \left(\frac{2k - \delta}{\delta} \right) e^{\delta t} \left(1 + \delta t + \frac{\delta^2 t^2}{2} + \frac{\delta^3 t^3}{3!} + \ldots - 1 \right)$$

$$\sigma^2 = n_0 (2k - \delta) e^{\delta t} \left(t + \frac{\delta}{2} t^2 + \frac{\delta^2}{3!} t^3 \ldots \right)$$

$\sigma^2 = 2kt \cdot n_0$, steigt linear mit der Zeit

$$\sigma \sim \sqrt{t}$$

$$P(0,t) = \left[1 - \frac{\delta}{k - (k - \delta)\left(1 - \delta t + \frac{\delta^2 t^2}{2} - \frac{\delta^3 t^3}{3!} + \ldots \right)} \right]^{n_0}$$

$$P(0,t) = \left[1 - \frac{\delta}{\left(k - k + k \cdot \delta \cdot t - \frac{k\delta^2 t^2}{2} \ldots + \delta - \delta^2 t + \frac{\delta^3 t^2}{2} \ldots \right)} \right]^{n_0}$$

$$P(0,t)=\left[1-\frac{\delta}{k\cdot\delta\cdot t-\frac{k\delta^2t^2}{2}...+\delta-\delta^2t^2...}\right]^{n_0}$$

$$P(0,t)=\left(1-\frac{1}{kt+1}\right)^{n_0}=\left(\frac{kt+1-1}{kt+1}\right)^{n_0}$$

$$P(0,t)=\left(\frac{kt}{kt+1}\right)^{n_0} \quad , \; k=d$$

Wie in der deterministischen Theorie bleibt für $k=d$ der Mittelwert konstant. Da aber die mittlere quadratische Abweichung linear mit der Zeit zunimmt, verliert die deterministische Lösung für große Zeiten *t* ihre Aussagekraft. Bei $k=d$ folgt

$$P(0,t)\to 1 \text{ für } t\to\infty$$

Die Population stirbt mit Sicherheit aus.