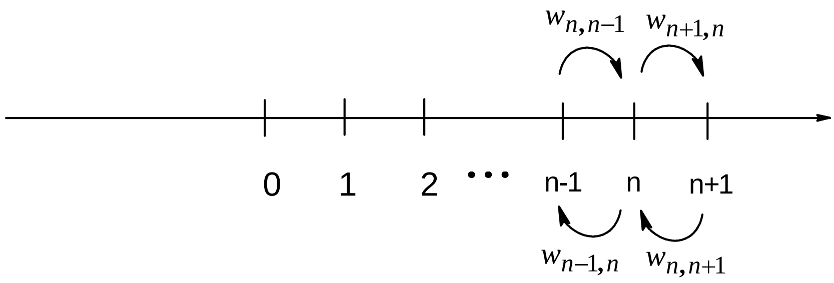
13. Zufallsbewegung als stochastischer Prozeß

Zunächst wieder 1-dimensionaler Fall



Übergangsraten: $w_{ij} \neq 0$ für $|i-j|=1$, Austausch zwischen benachbarten Plätzen.

$P(n,t)$: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = w_{n,n-1}\,P(n-1,t) + w_{n,n+1}\,P(n+1,t) - w_{n+1,n}\cdot P(n,t) - w_{n-1,n}\,P(n,t)$$

Wir setzen voraus, daß die Übergänge nach links und rechts gleichberechtigt sind

$w_{ij} = k$ für $|i-j|=1$

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = k\left[P(n+1,t) + P(n-1,t) - 2P(n,t)\right]$$

Wegen $-\infty < n < \infty$ sind das unendlich viele miteinander gekoppelte Differentialgleichungen.

Anfangsbedingung: $P(n,t) = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$

Zunächst: Anwendung der Methode der erzeugenden Funktionen: $G(s,t) = \sum_n s^n P(n,t)$

$$\frac{d}{dt}\sum_{-\infty}^{\infty} s^n P(n,t) = k\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n P(n+1,t) + k\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n P(n-1,t) - 2k\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n P(n,t)$$

$$\frac{dG(s,t)}{dt} = k\left(\frac{1}{s} + s - 2\right)G(s,t),$$ gewöhnliche Differentialgleichung

$$G(s,t) = Ae^{k\left(\frac{1}{s}+s-2\right)t},$$ A=1 wegen $G(1,t)=1$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial s}\right|_{s=1} = e^{k\left(\frac{1}{2}+s-2\right)t}\cdot k\left(-\frac{1}{s^2}+1\right)t\Big|_{s=1} = 0$$

$\bar{n} = 0$, einleuchtend wegen links-rechts-Symmetrie

$$\left.\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\right|_{s=1} = e^{k\left(\frac{1}{s}+s-2\right)t} k^2\left(-\frac{1}{s^2}+1\right)^2 t^2 + e^{k\left(\frac{1}{s}+s-2\right)t}\left.\frac{2kt}{s^3}\right|_{s=1} = 2kt$$

$$\sigma^2 = 2kt$$

Es bieten sich aber auch andere Lösungsmöglichkeiten an, z.B. eine Fouriertransformation

$$F(\varphi,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n,t)e^{in\varphi} \qquad (*) \quad \text{wobei:} \qquad e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin(\mathrm{n}\,\varphi)$$

Ansatz (*) entspricht der Entwicklung in eine Fourierreihe.

Wir erhalten:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{dP(n,t)}{dt}e^{in\varphi} = k\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n+1,t)e^{in\varphi} + P(n-1,t)e^{in\varphi} - 2P(n,t)e^{in\varphi}\right\}$$

$$\frac{dF(\varphi,t)}{dt} = k\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{P(n+1,t)e^{i(n+1)\varphi}\ e^{-i\varphi} + P(n-1,t)e^{i(n-1)\varphi}\ e^{i\varphi} - 2P(n,t)e^{in\varphi}\right\}$$

$$\frac{dF(\varphi,t)}{dt} = k\left\{F(\varphi,t)e^{-i\varphi} + F(\varphi,t)e^{i\varphi} - 2F(\varphi,t)\right\}$$

$$\frac{dF(\varphi,t)}{dt} = k\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 2\right)F(\varphi,t)$$

mit $\quad \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi$

$\dfrac{dF(\varphi,t)}{dt} = k(2\cos\varphi - 2)F(\varphi,t)$, gewöhnliche lineare Differentialgleichung,

Lösung: $\quad F(\varphi,t) = Ae^{k(2\cos\varphi-2)t}$

$F(\varphi,0) = Ae^{0} = A$, andererseits: $F(\varphi,0) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P(n,0)e^{in\varphi}$

Anfangsbedingung: $P(0,0)=1$, $P(n,0)=0$ für $n \neq 0$, also $A=1$

$F(\varphi,t) = e^{-2kt}e^{2kt\cos\varphi}$ (*)

Berechnung des Mittelwertes

$\bar{n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n\,P(n,t)$; $F(\varphi,t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P(n,t)e^{in\varphi}$

$\dfrac{dF}{d\varphi} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} i\cdot nP(n,t)e^{in\varphi}$, $\quad -i\dfrac{dF}{d\varphi} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} nP(n,t)e^{in\varphi}$

$$\bar{n} = \sum nP(n,t) = -i\left.\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}$$

Wegen: $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -e^{-2kt} e^{2k(\cos\varphi)t} \cdot 2k(\sin\varphi) \cdot t \Big|_{\varphi=0} = 0$

gilt $\bar{n} = 0$, erwartetes Ergebnis

Schwankungen: $\sigma^2 = \overline{n^2} - (\bar{n})^2$

$$\overline{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 P(n,t)$$

$$\frac{dF(\varphi,t)}{d\varphi} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, P(n,t) e^{in\varphi}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 P(n,t) e^{in\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 P(n,t)$$

$$\overline{n^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=0}$$

Anwendung dieser Formel:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2kt \sin\varphi\, e^{-2kt}\, e^{2kt\cos\varphi}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=0} = -e^{2kt}\, 2kt\left[\cos\varphi\, e^{2kt\cos\varphi} - \sin^2\varphi \cdot 2kt \cdot e^{2kt\cos\varphi}\right]\varphi = 0$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=0} = 2kt$$

$$\sigma^2 = 2kt; \;\; \sigma = \sqrt{2kt}$$

Die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(n,t)$ lässt sich durch Rücktransformation von (*) finden.